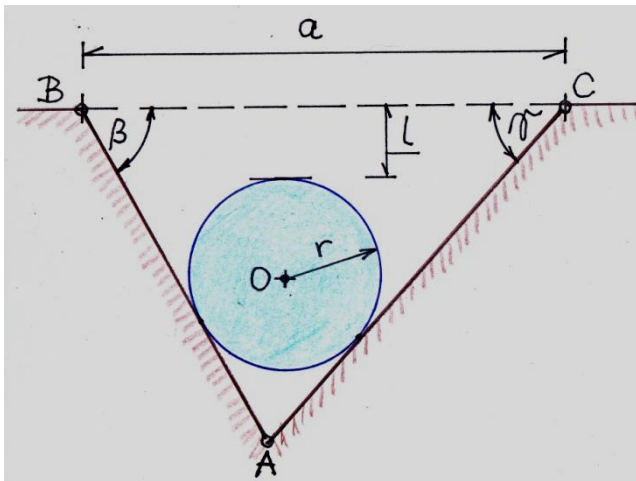


Egy újabb trigonometriai gyakorlat

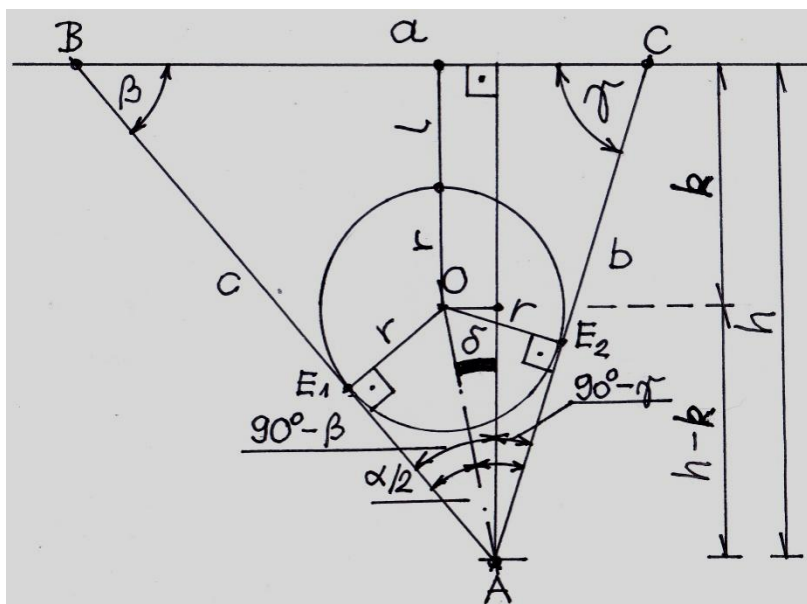
A feladat – 1. ábra

Egy vízszintes tengelyvonalú és partvonalú ék alakú árokba egy hengert helyezünk hossz - szában, szintén vízszintesen. Az árok széleinek távolsága a , oldalai a vízszintes síkkal β és γ szöget zárnak be. A henger sugara r . Határozzuk meg, hogy a henger felső alkotója milyen l mélységben helyezkedik el a vízszintes térszín alatt!



1. ábra

A megoldás – 2. ábra



2. ábra

A 2. ábra alapján:

$$l = k - r = h - (h - k) - r.$$

(1)

Az (1) képlet szerint előbb meg kell határoznunk a ***h*** és a ***h – k*** szakaszok hosszát.

1. ***h*** meghatározása

Színusz - szögfüggvénnyel:

$$\sin \gamma = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot \sin \gamma . \quad (2)$$

Most szinusz - tétellel:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin [180^\circ - (\beta + \gamma)]} = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} \rightarrow b = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} \cdot a . \quad (3)$$

Majd (2) és (3) - mal:

$$h = a \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} . \quad (4)$$

Felhasználjuk az alábbi trigonometriai azonosságot:

$\sin (\beta + \gamma) = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma$; ezzel:

$$\frac{\sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} , \quad (5)$$

így (4) és (5) - tel:

$$h = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}} . \quad (6)$$

2. ***h – k*** meghatározása

A 2. ábra szerint:

$$h - k = \overline{AO} \cdot \cos \delta ; \quad (7)$$

ámde:

$$\overline{AO} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} , \quad (8)$$

majd a 2. ábra alapján:

$$\delta = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ = - \left[90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) \right] ; \quad (9)$$

Most (7), (8) és (9) - cel:

$$\begin{aligned}
h - k &= \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \left\{ - \left[90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) \right] \right\} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \left[90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) \right] = \\
&= r \cdot \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ tehát:} \\
h - k &= r \cdot \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Mivel:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}, \tag{11}$$

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma = 90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} + \gamma = 90^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2}, \tag{12}$$

ezért (10), (11) és (12) - vel:

$$h - k = r \cdot \frac{\sin \left(90^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2} \right)}{\sin \left(90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} \right)} = r \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}, \text{ tehát:}$$

$$h - k = r \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}. \tag{13}$$

3. l meghatározása

Most (1), (6), (13) - mal:

$$l = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}} - r \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}} - r = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}} - r \cdot \left(1 + \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}} \right); \tag{14}$$

részletszámítással:

$$1 + \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}; \tag{15}$$

felhasználjuk az alábbi trigonometriai azonosságot:

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2},$$

$$A = \frac{\beta + \gamma}{2}, B = \frac{\beta - \gamma}{2} \rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2}}{2} = \frac{\beta}{2}, \frac{A-B}{2} = \frac{\frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2}}{2} = \frac{\gamma}{2}, \text{ így:}$$

$$\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}, \tag{16}$$

ezért (15) és (16) - tal:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} &= \frac{\cos \frac{\beta+\gamma}{2} + \cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{2 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right)} = 2 \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} = 2 \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \text{ tehát:} \\
 1 + \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} &= 2 \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Ezután (14) és (17) - tel:

$$\underline{\underline{l(a, r, \beta, \gamma) = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}} - 2 \cdot r \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.}} \tag{18}$$

A (18) képlet a válasz a feltett kérdésre.

Megjegyzések:

M1. Adja magát az alábbi többlet - feladat:

Mekkora legyen változatlan α, β, γ mellett a henger azon r_0 sugara, amelynél a teteje a térszínnel egy vonalba esik? Ekkor (18) - ból az $l = 0$ feltételből:

$$\frac{a}{2 \cdot r_0} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}; \tag{19}$$

most felhasználjuk az alábbi trigonometriai azonosságot:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \text{ ezzel:}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}; \tag{20}$$

majd (19) és (20) szerint:

$$\frac{a}{2 \cdot r_0} = \frac{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \text{ innen:}$$

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}; \tag{a}$$

a jobb oldalt tovább alakítva:

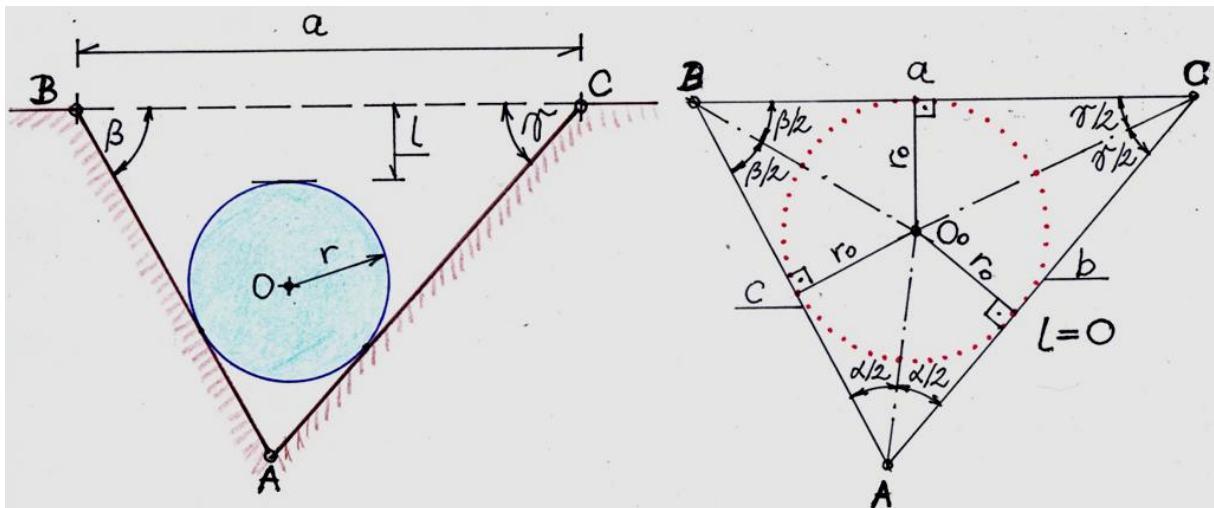
$$\begin{aligned} & \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \\ & = \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) = \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right); \quad (b) \end{aligned}$$

most (a) és (b) - vel:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{innen:}$$

$$\underline{r_0 = \frac{a}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}}}. \quad (21)$$

A (21) képletet a 3. ábra teszi szemléletesebbé.



3. ábra

Hiszen:

$$a = r_0 \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + r_0 \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r_0}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{r_0}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = r_0 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right), \quad \text{innen:}$$

$$r_0 = \frac{a}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}}, \quad (21) - \text{gyel egyezően.}$$

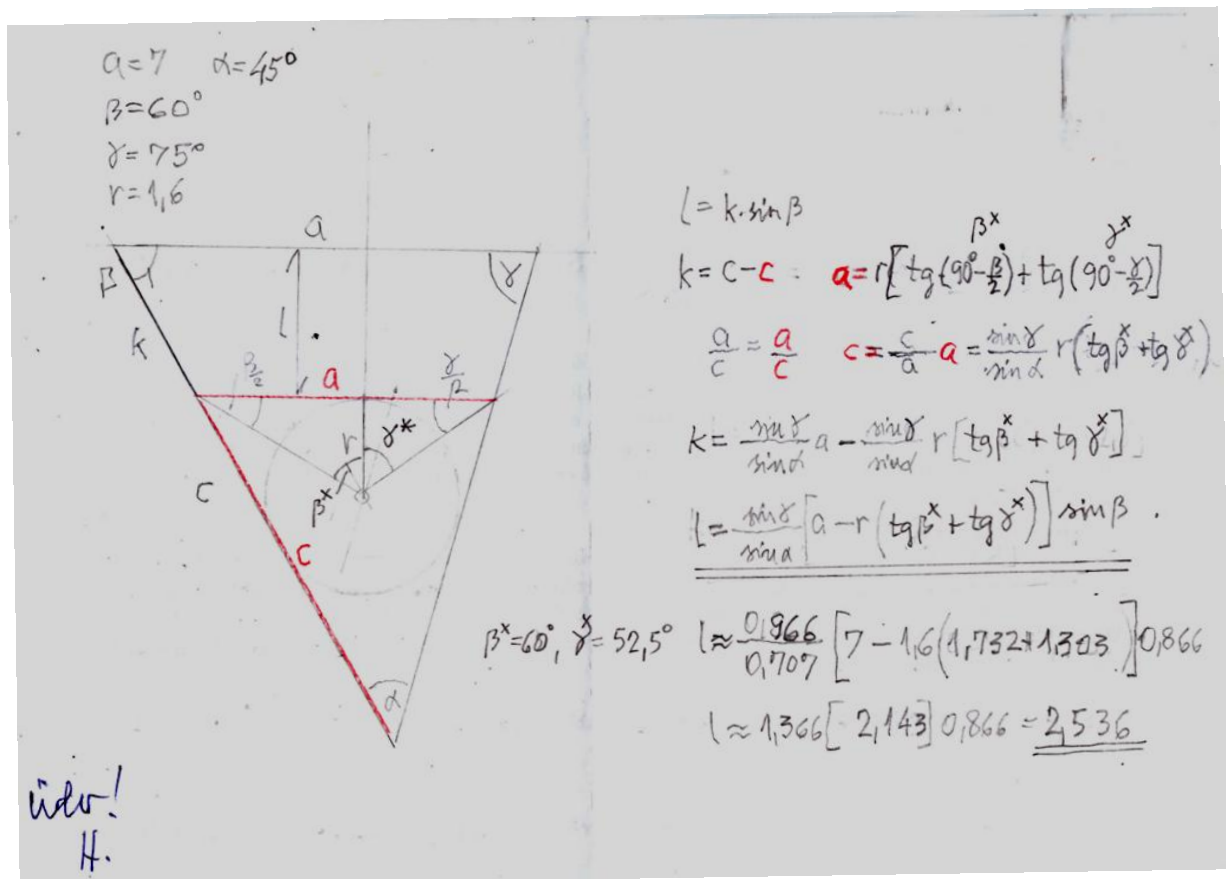
Látjuk, hogy változatlan a, β, γ adatok esetén a keresett r_0 sugár éppen a mondott adatokkal megadott ABC háromszögbe írható kör sugara.

M2. A további származtatott feladatok és speciális esetek vizsgálatát rábízzuk az érdek -

lödö Olvasóra.

M3. A felhasznált trigonometriai azonosságok megtalálhatók [1] - ben.

M4. Egy másik megoldást láthatunk a 4. ábrán, számpéldával együtt. Ezt *Hajdu Endrének* köszönjük meg.



4. ábra

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnök tanár

Sződliget, 2019. 01. 16.